



Universidade Federal de Pernambuco

Departamento de Física

**Exame Geral de Doutorado**

Primeiro Semestre de 2017

**Mecânica Quântica**

09/03/2017 - 09:00 às 12:00 h

(Escolha três dentre as quatro questões)

### QUESTÃO 1 – FUNDAMENTOS DE MECÂNICA QUÂNTICA

Uma partícula de momento magnético  $\vec{m} = m_0 \vec{\sigma}$ , onde  $\vec{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$  e  $m_0 > 0$ , é colocada na presença de um campo magnético  $\vec{B} = B \hat{e}_x$ . Admita que a partícula tem spin  $1/2$  e que o hamiltoniano é dado por

$$\mathcal{H} = -\vec{m} \cdot \vec{B} = \begin{pmatrix} 0 & -m_0 B \\ -m_0 B & 0 \end{pmatrix}.$$

- (a) (50%) Considerando que a matriz densidade inicial da partícula é dada por

$$\rho(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

obtenha  $\rho(t)$  em um tempo arbitrário  $t > 0$ .

- (b) (30%) Calcule as probabilidades  $P_y(\pm m_0; t)$  de uma medição do momento magnético  $\vec{m}$  na direção  $y$  resultar nos valores  $\pm m_0$  em função de  $t$ .
- (c) (20%) Esboce gráficos do item (b).

Dados:

$$\bullet \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\bullet \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix};$$

$$\bullet \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

## QUESTÃO 2 – MOMENTO ANGULAR

A função de onda de uma partícula submetida a um potencial esfericamente simétrico,  $V(r)$ , é dada por  $\psi(\mathbf{x}) = (x + y + 3z) f(r)$ . Pergunta-se:

- (a) (40%) Verifique que  $\psi$  é uma autofunção de  $\mathbf{L}^2$ , onde  $\mathbf{L}$  é o operador momento angular, e determine o autovalor correspondente.
- (b) (20%) Determine quais são as probabilidades para a partícula ser encontrada nos vários  $m_l$ , onde  $m_l$  são os números quânticos associados ao operador  $L_z$  (componente  $z$  do operador momento angular).
- (c) (40%) Suponha que  $f(r) = A r^{-1} e^{-r/a_0}$ , onde  $a_0$  é uma constante e  $A$  é a constante de normalização. Determine  $V(r)$  sabendo que  $\psi(\mathbf{x})$  é autofunção da energia com autovalor  $E$ .

Dados:

- $\nabla^2 \psi = \frac{1}{r^2} \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2} \right];$
- $Y_0^0(\theta, \phi) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}};$
- $Y_1^0(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta, \quad Y_1^1(\theta, \phi) = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta e^{i\phi};$
- $Y_2^0(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{5}{4\pi}} \left( \frac{3}{2} \cos^2 \theta - \frac{1}{2} \right), \quad Y_2^1(\theta, \phi) = -\sqrt{\frac{15}{8\pi}} \sin \theta \cos \theta e^{i\phi},$   
 $Y_2^2(\theta, \phi) = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{15}{2\pi}} \sin^2 \theta e^{2i\phi};$
- $Y_l^m(\theta, \phi) = \left[ \frac{(-1)^l}{2^l l!} \sqrt{\frac{(2l+1)}{4\pi} \frac{(l+m)!}{(l-m)!}} \right] \frac{e^{im\phi}}{\sin^m \theta} \frac{d^{l-m}}{d(\cos \theta)^{l-m}} (\sin \theta)^{2l}, \text{ para } m \geq 0;$
- $Y_l^{-m}(\theta, \phi) = (-1)^m [Y_l^m(\theta, \phi)]^*.$

---

### QUESTÃO 3 – TEORIA DE PERTURBAÇÃO

O Hamiltoniano de um oscilador harmônico bidimensional isotrópico é dado por:

$$\mathcal{H}_0 = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{p_y^2}{2m} + \frac{m \cdot \omega_0^2}{2} (x^2 + y^2),$$

onde  $m$  é a massa do oscilador e  $\omega_0$  tem unidades de frequência angular.

- (a) (20%) Determine as energias e degenerescências dos três estados menos energéticos.
- (b) (40%) Considere que neste sistema é aplicada uma perturbação do tipo  $V_1 = \delta m \omega_0^2 x y$ , onde  $\delta$  é um número real sem dimensão e muito menor que a unidade. Para os três estados menos energéticos do item anterior, calcule os autoestados de energia corrigidos em ordem zero e seus respectivos valores de energia corrigidos em primeira ordem (energia não perturbada obtida anteriormente mais o deslocamento de energia de primeira ordem).
- (c) (40%) Considere agora que a perturbação  $V_1$  foi desligada e que em seu lugar, em um instante de tempo  $t = 0$ , foi acionado um potencial dependente do tempo  $V_2(t) = F_0 x \cos(\omega t)$ , onde  $F_0$  é uma constante. Sabe-se que para  $t \leq 0$  o oscilador encontrava-se em seu estado fundamental. Use teoria de perturbação dependente do tempo, considerando a correção não nula de mais baixa ordem, para obter as expressões que descrevem o estado quântico para  $t > 0$ , nas representações de interação e de Schrödinger. Comente se este tratamento perturbativo permanece válido para  $\omega \approx \omega_0$ .

Dados:

- $N_{x,y} = a_{x,y}^\dagger a_{x,y};$
  - $a_x = \sqrt{\frac{m\omega_0}{2\hbar}} \left( x + i \frac{p_x}{m\omega_0} \right), \quad a_y = \sqrt{\frac{m\omega_0}{2\hbar}} \left( y + i \frac{p_y}{m\omega_0} \right).$
-

---

**QUESTÃO 4 – ESPALHAMENTO**

Considere uma partícula de massa  $m$  submetida a um potencial repulsivo radial  $V(r) = \lambda/r^4$ ,  $\lambda > 0$ .

- (a) (20%) Escreva a equação de Schrödinger radial para energia nula,  $E = 0$ , e momento angular nulo,  $l = 0$ , usando a função tentativa  $\Psi(r, \theta, \varphi) = f(r)Y_l^m(\theta, \varphi)$ , onde  $Y_l^m$  é a função harmônica esférica.
  - (b) (20%) Obtenha a solução exata do item (a) para a função radial  $R(r) = rf(r)$ .
  - (c) (20%) Mostre que para  $r \rightarrow \infty$ , temos que  $R(r) \sim A(1 - r/a)$ , and  $A$  e  $a$  são constantes.
  - (d) (30%) Fazendo  $V(r) = 0$  e escrevendo  $E = \hbar^2 k^2/(2m)$  mostre que a função  $R(r) = \sin(kr + \delta_0)$  resolve a equação radial. Expanda  $R(r)$  em potências de  $k$  e compare o resultado com a resposta do item (c) para concluir que  $ka = -\cot \delta_0$ .
  - (e) (10%) Com base no resultado do item (d) interprete fisicamente a constante  $a$ .
-